



TITLE:

プラズマ中の衝撃波の内部構造 (流体力学における数値計算シンポジウム報告)

AUTHOR(S):

丹生, 慶四郎

CITATION:

丹生, 慶四郎. プラズマ中の衝撃波の内部構造 (流体力学における数値計算シンポジウム報告). 数理解析研究所講究録 1965, 7: 25-30

ISSUE DATE:

1965-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107373>

RIGHT:

プラズマ中の衝撃波の内部構造

阪大 基礎工 丹 生 慶 四 郎

1. まえがき

プラズマ中の衝撃波の内部構造は、多くの人達の努力にもかかわらず、現在まだ完全な解析法が見当らない。そこで筆者は、先に発表した論文^{1), 2)} にそつて数値計算を行つた。以下はその中間報告である。

2. 基礎方程式

基礎方程式としては、イオン及び電子に対する連続式、運動式、エネルギー式が用いられる。

$$\frac{d}{dx} (n_k u_k) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} (m_k n_k u_k^2 + k n_k T_k - \frac{4}{3} \mu_k \frac{du_k}{dx}) \mp e n_k E = \pm P, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} (\frac{1}{2} m_k n_k u_k^3 + \frac{5}{2} k n_k u_k T_k - \frac{4}{3} \mu_k u_k \frac{du_k}{dx} - K_k \frac{dT_k}{dx}) \mp e n_k u_k E = \pm Q. \quad (3)$$

ここで m は質量, k はボルツマン常数, e は陽子の電荷, μ は粘性係数, K は熱伝導係数, x は距離, n は数密度, u は速度, T は温度, E は電場を表わす。添字 k は p 又は e に代つて用いられ, p はイオン, e は電子を示す。又複号中上号はイオン, 下号は電子に対して使用される。(2) 式及び (3) 式中, 右辺の P 及び Q はイオンと電子の相互作用を表わす項で, 上記の変数を含む函数で表現されている。

さて, 各変数を無次元化して

$$\nu = \frac{n_p}{n_1}, \rho = \frac{n_e}{n_1}, \theta = \frac{T_p}{T_1}, \tau = \frac{T_e}{T_1}, \varepsilon^2 = \frac{E^2}{10\pi k n_1 T_1}, \xi = \frac{x}{\lambda_1}, \quad (4)$$

とする。添字 1 は衝撃波前方の一様状態を表わし, λ は平均自由行路である。又粘性係数及び熱伝導係数に関しては,

$$\mu_p = \mu_1 \theta^{5/2}, K_e = K_1 \tau^{5/2}, \mu_e = K_p = 0, \quad (5)$$

なる関係を採用する。今

$$n_1 = 10^{15} \text{ cm}^{-3}, \quad T_1 = 3 \times 10^5 \text{ }^\circ\text{K}, \quad (6)$$

と選ぶと，マッハ数 5 の流れに対して，(1) ~ (3) 式は次のように変形される。

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0.534634845 \times 10^4 (\nu - \rho) \equiv R, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{d\xi} = 0.346160998 \times 10^{-1} \frac{\nu}{\theta^{5/2}} \{ & 0.256 \times 10^3 \nu - 0.25 \times 10^3 - 0.3 \times 10 \nu^2 \theta \\ & - 0.3 \times 10 \nu \rho \tau + 0.6 \times 10 \nu \varepsilon^2 \} \equiv S, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\xi} = 0.118137453 \times 10^{-1} \frac{1}{\nu^2 \tau^{5/2}} \{ & -0.28 \times 10^3 \nu^2 + 0.512 \times 10^3 \nu - 0.25 \times 10^3 \\ & + 0.9 \times 10 \nu^2 \theta + 0.15 \times 10^2 \nu^2 \tau - 0.6 \times 10 \nu \rho \tau + 0.12 \times 10^2 \nu \varepsilon^2 \} \equiv X, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{1}{\tau} \{ & \rho X + 0.213853938 \times 10^5 \varepsilon \rho + 0.181031498 \times 10^3 \rho^2 \left(\frac{0.1 \times 10 - 0.28 \nu}{\rho - 0.1 \times 10} P_1 \right. \\ & \left. - \frac{\nu - 0.1 \times 10}{0.1 \times 10 - 0.28 \rho} P_2 \right) \} \equiv Y, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{0.1}{0.9 \nu^3} \{ & (0.512 \times 10^3 - 0.6 \times 10 \rho \tau + 0.12 \times 10^2 \varepsilon^2) \nu - 0.5 \times 10^3 \} S \\ & + \frac{0.2}{0.3} \left(\frac{\rho}{\nu} X + \frac{\tau}{\nu} Y \right) - \frac{0.8}{0.3} \frac{\varepsilon}{\nu} R + 0.142569292 \times 10^5 \varepsilon \\ & - 0.65693943 \times 10^{-1} \rho \{ (0.1 \times 10 - 0.28 \nu) Q_1 + (\nu - 0.1 \times 10) Q_2 \} \equiv Z, \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$P_1 = -\frac{0.2}{0.3} \Theta_1^3 \Omega_1^2, \quad (12) \quad P_2 = -\frac{0.2}{0.3} \Theta_2^3 \Omega_2^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & -\frac{0.183612011 \times 10^4 (\tau - 0.1 \times 10)}{0.1 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau} \Theta_1 + 0.122474674 \times 10^4 \Theta_1^3 \Omega_1 \\ & - \frac{0.183612011 \times 10^4 (0.3 \times 10 - \tau) + 0.2 \times 10}{0.3 \times 10 (0.1 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau)} \Theta_1^3 \Omega_1^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q_2 = \frac{0.183612011 \times 10^4 (0.868 \times 10 - \tau)}{0.868 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau} \Theta_2 - 0.342929081 \times 10^3 \Theta_2^3 \Omega_2^3 \\ - \frac{0.183612011 \times 10^4 (0.2604 \times 10^2 - \tau) + 0.1736 \times 10^2}{0.3 \times 10 (0.868 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau)} \Theta_2^3 \Omega_2^2, \quad (15)$$

$$\Theta_1 = \left\{ \frac{0.125 \times 10^3}{0.3 \times 10 (0.1 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau)} \right\}^{1/2}, \quad (16)$$

$$\Theta_2 = \left\{ \frac{0.125 \times 10^3}{0.3 \times 10 (0.868 \times 10 + 0.183612011 \times 10^4 \tau)} \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

$$\Omega_1 = 0.1 \times 10 - \frac{0.1 \times 10}{\rho}, \quad (18) \quad \Omega_2 = \frac{0.1 \times 10}{\rho} - 0.28, \quad (19)$$

である。

我々の目的は、(7)～(11) 式を初期条件に従って数値積分するにあるが、初期条件は

$$\xi = -\infty \text{において} \quad \nu = \rho = \theta = \tau = 1, \quad \varepsilon = 0, \quad (20)$$

となり、初期勾配は尽く零となつて数値積分不能となるので、これらの式を變形して

$$\frac{d\varepsilon}{d\nu} = \frac{R}{S}, \quad (21) \quad \frac{d\tau}{d\nu} = \frac{X}{S}, \quad (22)$$

$$\frac{d\rho}{d\nu} = \frac{Y}{S}, \quad (23) \quad \frac{d\theta}{d\nu} = \frac{Z}{S}, \quad (24)$$

とし、まず位相空間での衝撃波形を求めることとする。

3. 初期値

(21)～(24) 式右辺に初期値を代入すると、各微係数は当然のことながら 0/0 となつて不定である。すなわち初期値は位相空間内の特異点となつている。そこで初期微係数を

$$\left. \begin{aligned} a &= (d\rho/d\nu)_{ini}, & b &= (d\tau/d\nu)_{ini}, \\ c &= (d\theta/d\nu)_{ini}, & f &= (d\varepsilon/d\nu)_{ini}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

とおき、

$$\nu = 1 + d\nu, \quad \rho = 1 + a d\nu, \quad \tau = 1 + b d\nu, \quad \theta = 1 + c d\nu, \quad \varepsilon = f d\nu, \quad (26)$$

と各変数を展開して (21) ~ (23) 式に代入し、微小量の 2 次以上の項を無視すれば、

$$\{0.247 \times 10^3 - 0.3 \times 10 (a+b+c)\} f = 0.154446375 \times 10^6 (1-a), \quad (27)$$

$$\{0.247 \times 10^3 - 0.3 \times 10 (a+b+c)\} b = -0.204767354 \times 10 (1+a) + 0.307151032 \times 10 (b+c), \quad (28)$$

$$\{0.247 \times 10^3 - 0.3 \times 10 (a+b+c)\} (a+b) = -0.617787501 \times 10^6 f + 0.857420888 \times 10 a - 0.852072231 \times 10, \quad (29)$$

$$\{0.247 \times 10^3 - 0.3 \times 10 (a+b+c)\} \left\{ c - \frac{0.2}{0.3} \right\} = 0.20569002 b - 0.599254055 \times 10, \quad (30)$$

なる代数方程式が得られる。そこで

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0.7647 \times 10^2, \quad c_0 = 0.38 \times 10, \quad f_0 = -0.4 \times 10^{-3}, \quad (31)$$

と推測し、

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad c = c_0 + \Delta c, \quad f = f_0 + \Delta f, \quad (32)$$

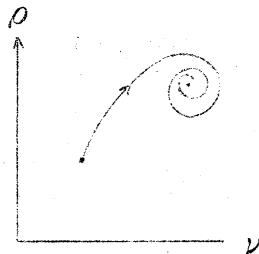
として、ニュートン法により a, b, c, f を求めた。使用した計算機は HITAC 201 で、倍長演算を行って得られた結果は、

$$\begin{aligned} a &= 0.1000000081172017951 \times 10, & b &= 0.76606090980971250459 \times 10^2, \\ c &= 0.36721475366411273597 \times 10, & f &= -0.39753453019593125143 \times 10^{-3}, \end{aligned} \quad (33)$$

である。

4. 衝撃波の数値計算

初期値が得られたので、(21) ~ (24) 式を用いて数値計算を行うわけであるが、第 1 図に示

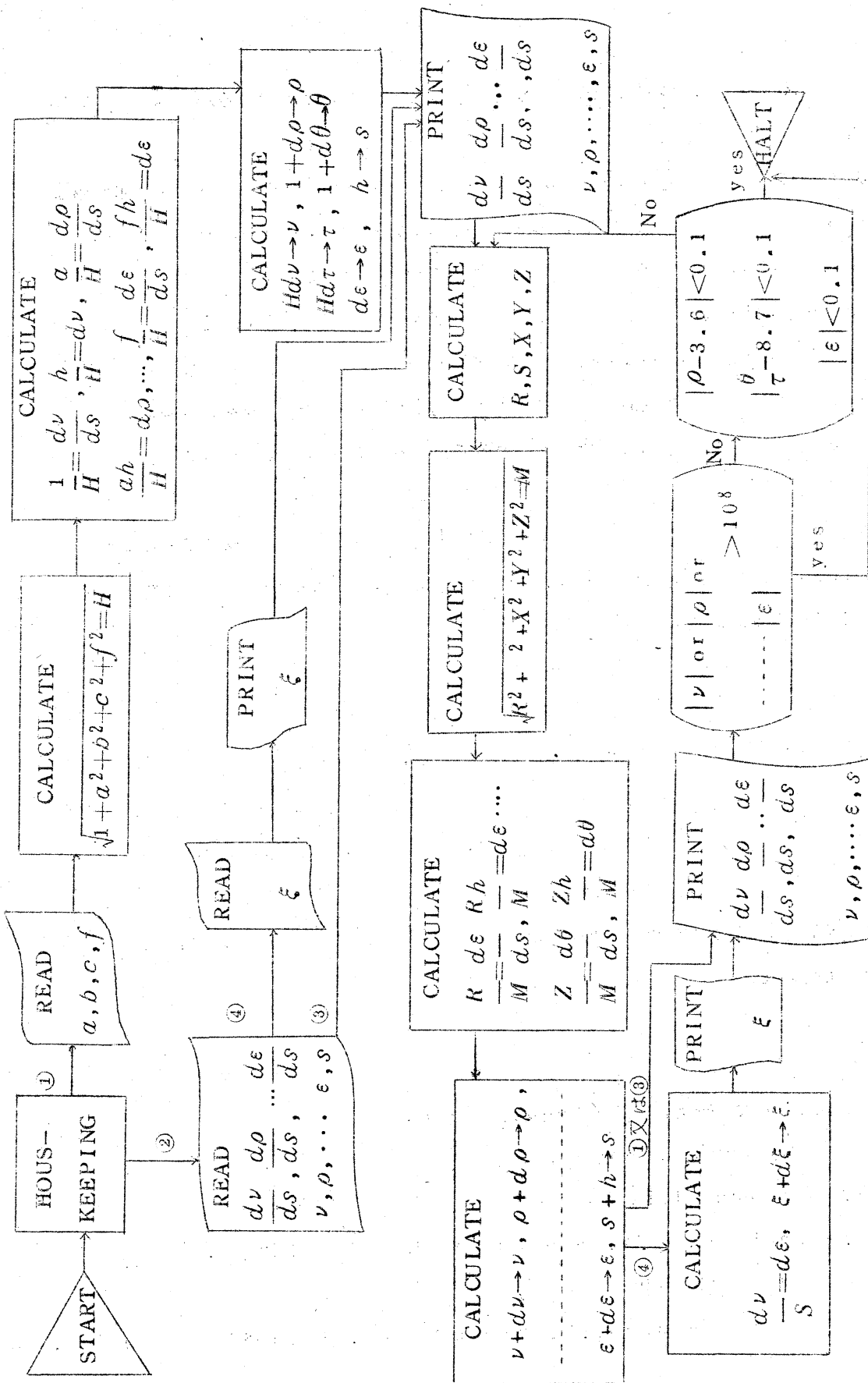


第 1 図

す如く、微係数が積分曲線上で無限大の値を持つ可能性があるので、更に

$$ds^2 = d\nu^2 + d\rho^2 + d\tau^2 + d\theta^2 + d\varepsilon^2, \quad (34)$$

なる変数 s を導入し、各変数は s について積分する事にした。計算順序を示すフローチャートは第 2 図のと



第 2 图

おりである。

かくして δ のステップ巾 h を種々にかえて、二倍長演算を実行したのであるが、遂に望ましい結果は得られなかった。

求められる積分曲線の精度を上げるためには、一見 δ のステップ巾を充分小さくする事が望ましいように思われる。しかし一方初期値は特異点となつてゐるため、初期値に充分近い点においては、(21)~(24)式の右辺の分母分子は充分に零に近い筈である。従つて、 δ のステップ巾をあまり細く選びすぎると、(21)~(24)式右辺の分母分子の有効数字は著しく減少して、かえつて初期値近傍での精度を悪くする。この事情は、特異点より出発して積分曲線を追求するこの種の数値計算には避け難く、最良のステップ巾を試行錯誤的に求めて進まねばならない。我々の計算においては、ステップ巾を 10^{-6} に選んだ時最良で、第一段階で得られた微係数と(33)式で与えられるものとの差は、有効数字第4桁目において始めてあらわれた。しかしながら、このステップ巾の近傍においても、ステップ巾をかえて得られる結果は、対応する δ の値に対して一致せず、むしろ繰り返しの度数に応じて同じ傾向の変化を生じ、繰り返しの度数に応じて蓄積された誤差が、曲線の傾きを決定している感がある。

5. 結論

原理的に追跡可能のように見える(21)~(24)式の数値積分は、かくして未だ完成することは出来なかった。その困難は、先にも述べた如く、積分曲線の出発点を特異点に求めねばならぬことにあるように思われる。しかしながら低次元ではあるが、この種の計算のすでに成功した例が報告されているので、³⁾⁻⁵⁾ 今後の研究は充分にこの計算の解決の可能性を含むように考えられる。

最後に、数値計算にあたつて御助力下さつた 大阪のNBC及びHITAC CENTERの方々に厚くお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 丹生慶四郎：東大航研集報 3 (1963) A-7.
- 2) K. Niu : J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 999.
- 3) F.S. Sherman : J. Fluid Mech. 8 (1960) 465.
- 4) O.W. Greenberg, H.K. Sen and Y.M. Tréve : Phys. Fluids 3 (1960) 379.
- 5) O.W. Greenberg and Y.M. Tréve : Phys. Fluids 3 (1960) 769.